Список вопросов с доказательством для подготовки к коллоквиуму по курсу «Алгебра», 2020/2021-го учебного года
Версия 1. 21 мая 2021 г.

1-й модуль

1. Что происходит с произведением матриц при транспонировании? Ответ обосновать.
2. Сформулировать и доказать критерий существования обратной матрицы. Свойства определителя предполагаются известными.
3. Какие три условия достаточно наложить на функцию от столбцов матрицы, чтобы она обязательно была детерминантом? Ответ обоснуйте для матриц второго порядка.
4. Сформулировать и доказать утверждение о том, что кососимметричность для линейной функции эквивалентна обнулению на паре совпадающих элементов.
5. Чему равен определитель произведения двух квадратных матриц? Ответ обосновать.
6. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка и доказать их.
7. Сформулировать и доказать критерий линейной зависимости.
8. Как связан ранг транспонированной матрицы с рангом исходной матрицы? Ответ обосновать.
9. Сформулировать и доказать следствие теоремы о базисном миноре для квадратных матриц (критерий невырожденности).
10. *Сформулировать и доказать критерий существования обратной матрицы. Свойства определителя предполагаются известными.*
11. *Сформулируйте и докажите теорему о базисном миноре.*
12. *Сформулируйте теорему Кронекера–Капелли и докажите её.*
13. *Сформулируйте и докажите теорему о ранге матрицы (теорема о базисном миноре предполагается известной).*

2-й модуль

1. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и докажите её (теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений предполагается известной).
2. Выпишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в произвольном базисе трехмерного пространства, и приведите её вывод.
3. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе трехмерного пространства и приведите её вывод.
4. Докажите теорему о том, что любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве задает плоскость и что любая плоскость определяется линейным уравнением.
5. Выпишите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости и приведите её вывод.
6. Выпишите формулу Муавра и докажите её.
7. Сформулируйте и докажите утверждение об изоморфности циклических групп.
8. *Выпишите формулу для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми и докажите её.*
9. *Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Докажите теорему о существовании ФСР.*
10. *Сформулируйте критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей и докажите его.*
11. *Докажите теорему о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений, то есть о том, что произвольное решение однородной СЛАУ может быть представлено в виде линейной комбинации элементов ФСР.*

3-й модуль

1. Сформулируйте и докажите утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.
2. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа (включая две леммы).
3. Докажите, что гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда его ядро тривиально.
4. Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.
5. Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.
6. Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме групп.
7. Докажите, что центр группы является её нормальной подгруппой.
8. Сформулируйте и докажите утверждение о том, чему изоморфна факторгруппа группы по её центру.
9. Сформулируйте и докажите теорему Кэли.
10. Докажите, что характеристика поля может быть либо простым числом, либо нулем.
11. Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.
12. Сформулируйте и докажите критерий того, что кольцо вычетов по модулю n является полем.
13. Докажите, что ядро гомоморфизма колец является идеалом.
14. Сформулируйте и докажите утверждение о том, когда факторколько кольца многочленов над полем само является полем.
15. Выпишите и докажите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.
16. Выпишите формулу для преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса и докажите её.
17. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса и докажите её.
18. *Сформулируйте и докажите три следствия из теоремы Лагранжа.*
19. *Что такое сумма и прямая сумма подпространств? Сформулируйте и докажите критерий того, что сумма подпространств является прямой.*
20. *Сформулируйте и докажите утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.*
21. *Сформулируйте и докажите (включая лемму) теорему об инвариантности ранга матрицы квадратичной формы.*
22. *Сформулируйте и докажите утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.*

4-й модуль

1. Сформулируйте и докажите утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.
2. Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям.
3. Сформулируйте и докажите критерий диагональности матрицы оператора.
4. Каким свойством обладает оператор в n-мерном вещественном пространстве, у характеристического многочлена которого есть n различных действительных корней? Ответ обоснуйте.
5. Выпишите и докажите неравенство Коши–Буняковского. Выпишите и докажите неравенство треугольника.
6. Докажите теорему о том, что евклидово пространство можно представить в виде прямой суммы подпространства и его ортогонального дополнения.
7. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису и докажите её. Что происходит с определителем матрицы Грама при применении процесса ортогонализации Грама—Шмидта? Что можно сказать про знак определителя матрицы Грама? Ответы обоснуйте.
8. Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости набора векторов с помощью матрицы Грама.
9. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов, и докажите её.

10. Докажите, что для любого оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует единственный сопряженный оператор.

11. Сформулируйте и докажите свойство собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям.

12. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора? Ответ обоснуйте.

13. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов. Приведите доказательство в случае различных вещественных собственных значений.

14. Сформулируйте и докажите теорему о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Верно ли обратно? Ответ обоснуйте.

15. Сформулируйте и докажите критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.

16. Сформулируйте и докажите утверждение о QR-разложении.

17. Сформулируйте и докажите теорему о сингулярном разложении.

18. Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

19. Выпишите и докажите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.

20. Что можно сказать про ортогональное дополнение к образу сопряженного оператора? Ответ обоснуйте. Сформулируйте и докажите теорему Фредгольма.